

# Преобразования Дарбу–Бэклунда (продолжение)

## Построение $n$ -солитонного решения

Итак, в случае уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

имеем линейные уравнения

$$\psi_{n,xx} + (u_n + \lambda)\psi_n = 0, \quad \psi_{n+1} = \psi_{n,x} - v_n\psi_n, \quad (2)$$

условие совместности которых определяет последовательность преобразований Бэклунда ( $x$ -часть, за  $t$  пока не следим)

$$-u_n = v_n^2 + v_{n,x} + \alpha_n, \quad u_{n+1} = u + 2v_{n,x}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

При этом  $v_n$  может быть выражена через частное значение  $\psi$ -функции при  $\lambda = \alpha_n$ :

$$v_n = \frac{\varphi_{n,x}}{\varphi_n}, \quad \varphi_{n,xx} + (u_n + \alpha_n)\varphi_n = 0. \quad (4)$$

В матричном виде:

$$\Psi_{n,x} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = A_n \Psi_n \quad \Rightarrow \quad A_{n,x} = U_{n+1} A_n - A_n U_n,$$

где

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} -v_n & 1 \\ v_n^2 + \alpha_n - \lambda & -v_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n,x} \end{pmatrix}.$$

Переход  $u_n \mapsto u_{n+1}$  согласно (3) требует решения уравнения Риккати. Однако, формулы становятся явными, если мы имеем достаточно богатый запас частных решений уравнения Шрёдингера, при каком-то одном  $n$  (пусть при  $n = 0$ ). Схема такая:

1. Пусть при  $n = 0$  известен набор решений  $\varphi_0^j$ , отвечающих попарно различным частным значениям спектрального параметра :

$$\varphi_{0,xx}^j + (u_0 + \alpha_j)\varphi_0^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

2. Если  $u_n$  и  $\varphi_n^j$  известны, используем одну из  $\varphi_n^j$ , чтобы построить  $v_n$  согласно (4). Для определенности, будем использовать  $\varphi_n^n$ :

$$v_n = \frac{\varphi_{n,x}^n}{\varphi_n^n}. \quad (6)$$

3. Остальные  $\varphi_n^j$  пересчитываем в волновые функции  $\varphi_{n+1}^j$  согласно (2) и определяем  $u_{n+1}$  согласно (3):

$$\varphi_{n+1}^j = \varphi_{n,x}^j - v_n \varphi_n^j, \quad u_{n+1} = u_n + 2v_{n,x}. \quad (7)$$

4. Идем к шагу 2 для  $n = n + 1$  и повторяем, пока не надоест.

В пункте 1 можно взять, например, затравочный потенциал  $u_0 = 0$ . Для него уравнение Шрёдингера решается явно:

$$\psi_{0,xx} + \lambda\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = ae^{zx} + be^{-zx}, \quad z^2 = -\lambda,$$

так что в качестве  $\varphi_0^j$  будут выступать функции

$$\varphi_0^j = a_j e^{k_j x} + b_j e^{-k_j x}, \quad k_j^2 = -\alpha_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

В алгоритме используются лишь арифметические операции и дифференцирование по  $x$ . Отсюда ясно, что при выборе (8) в ответе будут какие-то рациональные функции от экспонент. Сейчас мы свернём ответ в уже знакомую нам компактную вронскианную формулу для  $n$ -солитонного решения, но предварительно сделаем несколько замечаний.

- На каждом шаге у нас пропадает одна волновая функция, так как  $\varphi_n^n$  принадлежит ядру оператора  $\partial_x - v_n$ . Если у нас изначально задано  $N$  функций  $\varphi_0^j$ , то мы сможем сделать  $N$  шагов. Если функций бесконечно много (как в (8), например), то процесс можно продолжать сколь угодно долго. Можно это изобразить такой диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & u_0 & \xrightarrow{v_0} & u_1 & \xrightarrow{v_1} & u_2 & \xrightarrow{v_2} & u_3 & \dots \\
 \alpha_0 & \varphi_0^0 & \rightarrow & 0 & & & & & \\
 \alpha_1 & \varphi_0^1 & \rightarrow & \varphi_1^1 & \rightarrow & 0 & & & \\
 \alpha_2 & \varphi_0^2 & \rightarrow & \varphi_1^2 & \rightarrow & \varphi_2^2 & \rightarrow & 0 & \\
 \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots
 \end{array}$$

- На самом деле, пропажа функции восполнима, так как  $\partial_x - v_n$  можно применить ко второму линейно-независимому решению уравнения Шредингера, которое находится квадратурой. В результате, можно строить преобразования с кратными значениями  $\alpha_j$  (правда, при этом кроме дифференцирования приходится использовать и интегрирование). Это позволяет, в частности, строить рациональные решения КдФ. Для простоты, мы не рассматриваем этот случай; пусть все  $\alpha_n$  различны.
- Процедура построения неоднозначна, так как зависит от нумерации  $\alpha_j$ . Фактически, на  $n$ -м шаге можно использовать любую функцию  $\varphi_n^j$  из тех, что остались на данный момент. Тогда результат преобразования на шаге  $n+1$  зависит от выбора  $j$ . Возникает вопрос, сколько разных потенциалов можно получить за счёт изменения порядка преобразований. Чуть позже мы на него ответим.

Нам понадобится следующая лемма о вронскианах. Напомним обозначение:

$$W(f_1, \dots, f_n) = \det(\partial^{k-1}(f_j)) \Big|_{j,k=1}^n.$$

**Лемма 1.** Пусть  $A = \partial_x - f_{1,x}/f_1$ , тогда

$$W(f_1, \dots, f_n) = f_1 W(A(f_2), \dots, A(f_n)). \quad (9)$$

◀ Обе части равенства — линейные дифференциальные операторы степени  $n-1$  по  $\partial_x$ , действующие на  $f_n$ . Ядра этих операторов совпадают (натянуты на  $f_1, \dots, f_{n-1}$ ), откуда следует, что операторы отличаются на скалярный множитель. Сравнение коэффициентов при  $\partial^{n-1}(f_n)$  приводит к равенству  $W(f_1, \dots, f_{n-1}) = f_1 W(A(f_1), \dots, A(f_{n-1}))$ , что позволяет доказать утверждение по индукции. ▶

Введем обозначения

$$\Delta_n = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}), \quad \Delta_n(\varphi) = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\varphi$  произвольная функция. Для единообразия, пусть

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_0(\varphi) = \varphi.$$

Из формул (6), (7) получаем, пользуясь леммой 1,

$$\Delta_n = \varphi_0^0 W(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{n-1}) = \varphi_0^0 \varphi_1^1 W(\varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{n-1}) = \dots = \varphi_0^0 \dots \varphi_{n-1}^{n-1}$$

и, аналогично,

$$\Delta_n(\varphi_0^j) = \varphi_0^0 \dots \varphi_{n-1}^{n-1} \varphi_n^j, \quad j \geq n.$$

В результате, волновые функции потенциала  $u_n$  выражаются через вронскианы от волновых функций потенциала  $u_0$ :

$$\varphi_n^j = \Delta_n(\varphi_0^j)/\Delta_n, \quad j \geq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, имеем  $\varphi_n^n = \Delta_{n+1}/\Delta_n$ , откуда получаем выражение для  $v_n$ :

$$v_n = \frac{\Delta_{n+1,x}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n,x}}{\Delta_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(при  $n = 0$  второе слагаемое равно 0). Тогда, суммируя формулу  $u_n = u_0 + 2v_{0,x} + \dots + 2v_{n-1,x}$ , для потенциалов получаем выражение

$$u_n = u_0 + 2\partial_x^2 \log \Delta_n = u_0 + 2\partial_x^2 \log W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}). \quad (10)$$

Легко видеть, что если  $u_0 = 0$  и, соответственно, волновые функции имеют вид (8), это в точности та же формула для потенциалов Баргманна, что мы ранее получили методом обрыва ряда для  $\psi$ -функции (лекция 4). Чтобы получить решение для КдФ, нужно еще восстановить зависимость от  $t$ . Это легко, нужно лишь решить вспомогательную линейную задачу по  $t$  для  $\psi_0$ . Как мы помним, она имеет вид

$$\psi_t = -u_x \psi - 2(2\lambda - u)\psi_x \quad \stackrel{u=0}{\Rightarrow} \quad \psi_t = -4\lambda\psi_x.$$

Отсюда находим зависимость от  $t$  для коэффициентов в (8), что дает

$$\varphi_0^j = a_j e^{k_j x + 4k_j^3 t} + b_j e^{-k_j x - 4k_j^3 t}, \quad k_j^2 = -\alpha_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Мы не будем заново анализировать ограничения на параметры, следующие из требований вещественности и регулярности решений.

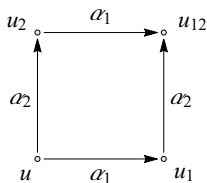
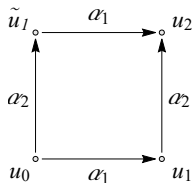
## Коммутативность преобразований Бэклунда

Из формулы (10) ясно, что конечный результат  $n$ -кратного преобразования Бэклунда не зависит от того, в каком порядке используются затравочные волновые функции  $\varphi_0^j$ . Их перенумерация приводит лишь к перестановке столбцов в вронскиане, что не меняет  $u_n$ . При этом промежуточные потенциалы, будут, конечно разными.

Пусть  $B_i$  обозначает преобразование Бэклунда с параметром  $\alpha_i$ . Тогда, если потенциалы  $u_0, u_1$  связаны  $B_1$ , а  $u_1, u_2$  связаны  $B_2$ , то найдется еще потенциал  $\tilde{u}_1$ , который связан с  $u_0$  и  $u_2$  преобразованиями с переставленными параметрами. Это свойство коммутативности

$$B_2 B_1 = B_1 B_2$$

выражается диаграммой Бьянки на левом рисунке.



Удобно немного сменить обозначения, как показано на рис. справа, чтобы подчеркнуть равноправие каждого из путей. То есть, будем теперь обозначать преобразование Бэклунда приписыванием соответствующего индекса:

$$u \xrightarrow{B_1} u_1 \xrightarrow{B_2} u_{12} \xrightarrow{B_3} u_{123} \xrightarrow{B_4} u_{1234} \dots$$

тогда свойство коммутативности означает просто совпадение переменных, отличающихся перестановкой индексов.

Можно доказать свойство коммутативности и не пользуясь вронскианными формулами. Кроме того, замечательным обстоятельством является то, что между переменными в вершинах квадрата имеется некая алгебраическая связь. В принципе, ее можно вывести прямо для переменных  $u, u_1, u_2$  и  $u_{12}$ , но в них она выглядит достаточно громоздко (вспомним, что само преобразование Бэклунда в этих переменных записывается с корнем). Наиболее удобной переменной является переменная  $q$ , связанная с  $u$  соотношением  $u = -2q_x$ . Для нее преобразование  $B_i$  определяется уравнением

$$B_i: \quad q_x + q_{i,x} = (q - q_i)^2 + \alpha_i. \quad (11)$$

**Теорема** (Формула нелинейной суперпозиции). Пусть переменная  $q$  связана с  $q_i$  преобразованием  $B_i$  и с  $q_j$  преобразованием  $B_j$ , причем  $\alpha_i \neq \alpha_j$ :

$$q_x + q_{i,x} = (q - q_i)^2 + \alpha_i, \quad q_x + q_{j,x} = (q - q_j)^2 + \alpha_j.$$

Тогда существует единственная переменная  $q_{ij}$ , связанная с  $q_i$  преобразованием  $B_j$  и с  $q_j$  преобразованием  $B_i$ :

$$q_{i,x} + q_{ij,x} = (q_i - q_{ij})^2 + \alpha_j, \quad q_{j,x} + q_{ij,x} = (q_j - q_{ij})^2 + \alpha_i.$$

Эта переменная однозначно выражается через  $q, q_i, q_j$  из уравнения

$$(q - q_{ij})(q_i - q_j) = \alpha_i - \alpha_j. \quad (12)$$

◀ Сложим уравнения с нужными знаками, так чтобы уничтожить все производные. Нетрудно проверить, что это даёт в точности соотношение (12). Таким образом, если искомая переменная  $q_{ij}$  существует, то она единственна и находится из этого уравнения (деление возможно, так как если  $q_i = q_j$ , то и  $\alpha_i = \alpha_j$ ). Далее, следует еще проверить, что определенная таким образом  $q_{ij}$  действительно удовлетворяет двум последним дифференциальным уравнениям. Это делается прямой подстановкой; оказывается, что они действительно выполняются в силу двух первых уравнений. ▶

Формула суперпозиции дает более эффективный способ построения солитонных решений, чем вронскианы, поскольку вычисление определителей большого порядка — очень трудоемкая операция.

Чтобы получить  $n$ -солитонное решение, нужно заготовить  $n$  штук 1-солитонных, стартуя с тривиального решения  $q = 0$  уравнения  $q_t = q_{xxx} - 6q_x^2$ . Решаем уравнение для  $q_j$ , полагая  $\alpha_j = -k_j^2$  и уточняя зависимость от  $t$  подстановкой в само уравнение. Это даёт

$$q_{j,x} = q_j^2 - k_j^2 \quad \Rightarrow \quad q_j = -k_j \tanh X_j, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 x + d_j, \quad j = 1, \dots, n$$

(при замене  $d_j$  на  $d_j + i\pi$  получаем  $\coth$  вместо  $\tanh$ ; нужно правильно чередовать эти функции, чтобы в конце получилось бесполюсное решение).

На первом шаге решения

$$q_1, \quad q_2, \quad q_2, \quad \dots \quad q_n$$

превращаются в 2-солитонные ( $n - 1$  штуки)

$$q_{12}, \quad q_{23}, \quad q_{34}, \quad \dots \quad q_{n-1,n}$$

по формуле (12). Затем из них получаются 3-солитонные ( $n - 2$  штуки)

$$q_{123}, \quad q_{234}, \quad \dots \quad q_{n-2,n-1,n}$$

по той же формуле и так далее, пока не дойдем до

$$q_{1,2,\dots,n}.$$

Всего придется применить формулу суперпозиции  $n(n-1)/2$  раз, что, конечно, не мало, но это гораздо меньше чем  $n!$  членов в определителе.



### 3D-совместность, или совместность вокруг куба

Если рассмотреть теперь три преобразования  $B_i, B_j, B_k$ , то порождаемые ими переменные ассоциируются с вершинами куба. При этом на каждой грани выполняется уравнение вида (12): на гранях, смежных с вершиной  $q$  имеем

$$\begin{aligned}(q - q_{ij})(q_i - q_j) &= \alpha_i - \alpha_j, \\ (q - q_{ik})(q_i - q_k) &= \alpha_i - \alpha_k, \\ (q - q_{jk})(q_j - q_k) &= \alpha_j - \alpha_k\end{aligned}\tag{13}$$

и аналогично на противоположных гранях

$$\begin{aligned}(q_k - q_{ijk})(q_{ik} - q_{jk}) &= \alpha_i - \alpha_j, \\ (q_j - q_{ijk})(q_{ij} - q_{jk}) &= \alpha_i - \alpha_k, \\ (q_i - q_{ijk})(q_{ij} - q_{ik}) &= \alpha_j - \alpha_k.\end{aligned}\tag{14}$$

Нетрудно видеть, что если задать  $q, q_i, q_j, q_k$ , то из первых трех уравнений можно найти  $q_{ij}, q_{ik}, q_{jk}$ , а потом из трех остальных  $q_{ijk}$ . Однако, на одну эту переменную получается три разных уравнения и неочевидно, что они дадут одно и то же выражение. Этого можно ожидать, если вспомнить, что на уровне вронскиановых формул эти три способа вычислений отвечают просто разной нумерации волновых функций. Но сейчас мы уже довольно далеко отошли от преобразований Бэклунда. Так как уравнения (13) чисто дискретные, кажется противоестественным привлекать какие-то там волновые функции. Проще сделать непосредственную проверку и убедиться, что все в порядке.

**Теорема** (3D-совместность, или совместность вокруг куба). Если значения  $q_{ij}$ ,  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$  найдены из уравнений (13), все три уравнения (14) дают одно и то же значение для переменной  $q_{ijk}$ .

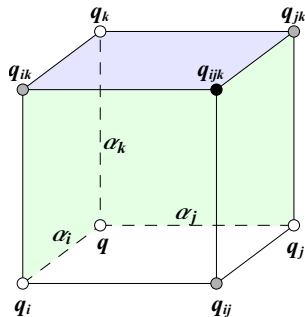
◀ Вычисляя сначала  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$ , а затем  $q_{ijk}$ , получаем

$$q_{ijk} = -\frac{(\alpha_j - \alpha_i)q_i q_j + (\alpha_k - \alpha_j)q_j q_k + (\alpha_i - \alpha_k)q_k q_i}{(\alpha_j - \alpha_i)q_k + (\alpha_k - \alpha_j)q_i + (\alpha_i - \alpha_k)q_j}.$$

Нетрудно видеть, что эта формула симметрична относительно перестановки индексов, а следовательно два других способа вычисления дают тот же самый результат. ▶

Соотношение (12) можно интерпретировать, как дискретное уравнение на решетке  $\mathbb{Z}^2$ . Свойство 3D-совместности означает, что его общее решение продолжимо на решетку  $\mathbb{Z}^3$  так, что во всех 2-мерных подрешетках выполняются уравнения такого же вида. Можно сказать, что уравнения в ортогональных плоскостях определяют друг для друга дискретные симметрии, а преобразования Бэклунда и исходное уравнение в частных производных — непрерывные, то есть, в некотором смысле, все эти уравнения являются членами одной и той же интегрируемой иерархии.

Конечно, кроме уравнения (12), есть и другие, обладающие такими же свойствами.



**Теорема** (3D-совместность, или совместность вокруг куба). Если значения  $q_{ij}$ ,  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$  найдены из уравнений (13), все три уравнения (14) дают одно и то же значение для переменной  $q_{ijk}$ .

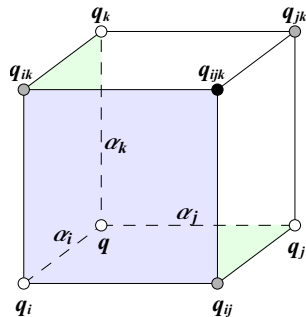
◀ Вычисляя сначала  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$ , а затем  $q_{ijk}$ , получаем

$$q_{ijk} = -\frac{(\alpha_j - \alpha_i)q_i q_j + (\alpha_k - \alpha_j)q_j q_k + (\alpha_i - \alpha_k)q_k q_i}{(\alpha_j - \alpha_i)q_k + (\alpha_k - \alpha_j)q_i + (\alpha_i - \alpha_k)q_j}.$$

Нетрудно видеть, что эта формула симметрична относительно перестановки индексов, а следовательно два других способа вычисления дают тот же самый результат. ▶

Соотношение (12) можно интерпретировать, как дискретное уравнение на решетке  $\mathbb{Z}^2$ . Свойство 3D-совместности означает, что его общее решение продолжимо на решетку  $\mathbb{Z}^3$  так, что во всех 2-мерных подрешетках выполняются уравнения такого же вида. Можно сказать, что уравнения в ортогональных плоскостях определяют друг для друга дискретные симметрии, а преобразования Бэклунда и исходное уравнение в частных производных — непрерывные, то есть, в некотором смысле, все эти уравнения являются членами одной и той же интегрируемой иерархии.

Конечно, кроме уравнения (12), есть и другие, обладающие такими же свойствами.



**Теорема** (3D-совместность, или совместность вокруг куба). Если значения  $q_{ij}$ ,  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$  найдены из уравнений (13), все три уравнения (14) дают одно и то же значение для переменной  $q_{ijk}$ .

◀ Вычисляя сначала  $q_{ik}$ ,  $q_{jk}$ , а затем  $q_{ijk}$ , получаем

$$q_{ijk} = -\frac{(\alpha_j - \alpha_i)q_i q_j + (\alpha_k - \alpha_j)q_j q_k + (\alpha_i - \alpha_k)q_k q_i}{(\alpha_j - \alpha_i)q_k + (\alpha_k - \alpha_j)q_i + (\alpha_i - \alpha_k)q_j}.$$

Нетрудно видеть, что эта формула симметрична относительно перестановки индексов, а следовательно два других способа вычисления дают тот же самый результат. ▶

Соотношение (12) можно интерпретировать, как дискретное уравнение на решетке  $\mathbb{Z}^2$ . Свойство 3D-совместности означает, что его общее решение продолжимо на решетку  $\mathbb{Z}^3$  так, что во всех 2-мерных подрешетках выполняются уравнения такого же вида. Можно сказать, что уравнения в ортогональных плоскостях определяют друг для друга дискретные симметрии, а преобразования Бэклунда и исходное уравнение в частных производных — непрерывные, то есть, в некотором смысле, все эти уравнения являются членами одной и той же интегрируемой иерархии.

Конечно, кроме уравнения (12), есть и другие, обладающие такими же свойствами.

